**Министерство науки и высшего образования Российской**

**Федерации**

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет информационных технологий и программирования

Прикладная математика

Лабораторная работа №1

Линейное программирование

**Выполнили студенты группы № M33091**

Фисенко Никита Данилович

Рустамов Марк Самирович

Санкт-Петербург 2023

**Постановка задачи:**

* Реализовать возможность ввода данных из файла в формате JSON, опираясь на рекомендуемую структуру.
* Добавить (при необходимости) балансирующие переменные для перехода от общей постановки к канонической форме задачи линейного программирования.
* Реализовать симплекс-метод для решения задачи.
* Предусмотреть ситуацию наличия как бесконечного количества решений, так и их отсутствия.

**Цель работы:**

Привести (при необходимости) общую форму записи модели задачи линейного программирования к канонической, реализовать симплекс-метод для решения задачи, а также осуществить возможность ввода данных в формате JSON.

**Теория:**

Изображение выглядит как текст, Шрифт, диаграмма, рукописный текст

Автоматически созданное описание*Определение*: *Линейное программирование* – математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения экстремальных задач на множествах n - мерного пространства, задаваемых системами линейными уравнений и неравенств. Общая задача линейного программирования имеет вид:

Изображение выглядит как текст, Шрифт, рукописный текст, белый

Автоматически созданное описаниеКаноническая форма задачи ЛП:

Опишем алгоритм приведения задачи ЛП к канонической форме:

1. Все коэффициенты целевой функции умножаем на -1
2. Если в системе есть неравенства вида (≤), то прибавляем добавочную переменную, и получаем равенство.
3. Если в системе есть неравенства вида (≥), то вычитаем добавочную переменную, и получаем равенство.

*Определение*: Точка называется *угловой* точкой, если представление где , *;* возможно только при

Иными словами, невозможно найти две точки в области, интервал, проходящий через которые содержит (т. е. – не внутренняя точка).

Графический способ решения задачи ЛП показывает, что нахождение оптимального решения ассоциируется с угловой точкой. Это является основной концепцией при разработке симплекс-метода.

Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение, избегая простой перебор всех возможных угловых точек. Основной принцип метода: вычисления начинаются с какого-то «стартового» базисного решения, а затем ведется поиск решений, «улучшающих» значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если возрастание какой-то переменной приведет к увеличению значения функционала.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Шрифт

Автоматически созданное описаниеДля удобства вычислений и наглядности обычно пользуются симплекс-таблицами:

В первой строке указывают «наименование» всех переменных. В первом столбце указывают номера базисных переменных, а в последней ячейке – букву Z (это строка функционала). В «середине таблицы» указывают коэффициенты матрицы ограничений — . Последний столбец – вектор правых частей соответствующих уравнений системы ограничений. Крайняя правая ячейка – значение целевой функции. На первой итерации ее полагают равной 0.

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода:

1. Выбираем переменную, которую будем вводить в базис. Это делается в соответствии с указанным ранее принципом: мы должны выбрать переменную, возрастание которой приведет к росту функционала.

Выбор происходит по следующему правилу:

Если задача на минимум – выбираем максимальный положительный элемент в последней строке. Если задача на максимум – выбираем минимальный отрицательный.

Такой выбор, действительно, соответствует упомянутому выше принципу: если задача на минимум, то чем большее число вычитаем – тем быстрее убывает функционал; для максимума наоборот – чем большее число добавляем, тем быстрее функционал растет.

*Определение*: Столбец симплекс-таблицы, отвечающий выбранному коэффициенту, называется *ведущим* столбцом.

1. Продолжаем выбирать переменную, которую будем вводить в базис. Для этого нужно определить, какая из базисных переменных быстрее всего обратится в нуль при росте новой базисной переменной.

Алгебраически это делается так:

Вектор правых частей почленно делится на ведущий столбец. Среди полученных значений выбирают минимальное положительное (отрицательные и нулевые ответы не рассматривают)

*Определение*: Такая строка называется *ведущей* строкой и отвечает переменной, которую нужно вывести из базиса.

*Замечание*: фактически, мы выражаем старые базисные переменные из каждого уравнения системы ограничений через остальные переменные и смотрим, в каком уравнении возрастание новой базисной переменной быстрее всего даст 0. Попадание в такую ситуацию означает, что мы «наткнулись» на новую вершину. Именно поэтому нулевые и отрицательные элементы не рассматриваются, т. к. получение такого результата означает, что выбор такой новой базисной переменной будет уводить нас из области, вне которой решений не существует.

1. Ищем элемент, стоящий на пересечении ведущих строки и столбца.

*Определение*: Такой элемент называется *ведущим* элементом.

1. Вместо исключаемой переменной в первом столбце (с названиями базисных переменных) записываем название переменной, которую мы вводим в базис.
2. Далее начинается процесс вычисления нового базисного решения. Он происходит с помощью метода Жордана-Гаусса.

Новая Ведущая строка = Старая ведущая строка / Ведущий элемент

Новая строка = Новая строка – Коэффициент строки в ведущем столбце \* Новая Ведущая строка

1. После этого проверяем условие оптимальности. Если полученное решение неоптимально – повторяем весь процесс снова.

Условие оптимальности полученного решения:

Если задача на максимум – в строке функционала *нет отрицательных коэффициентов* (т. е. при любом изменении переменных значение итогового функционала расти не будет).

Если задача на минимум – в строке функционала *нет положительных коэффициентов* (т. е. при любом изменении переменных значение итогового функционала уменьшаться не будет).

Однако, стоит отметить, что заданный функционал может не и достигать максимума/минимума в заданной области. Алгебраический признак этого можно сформулировать следующим образом:

При выборе ведущей строки (исключаемой переменной) результат почленного деления вектора правых частей на ведущий столбец содержит *только нулевые и отрицательные значения*.

Фактически, это значит, что какой бы рост мы ни задавали новой базисной переменной, мы никогда не найдем новую вершину. А значит, наша функция не ограничена на множестве допустимых решений.

**Примечание:**

Код представлен на: <https://github.com/russianZAK/applied-mathematics/blob/main/Lab%201%205-sem/lab1.5.ipynb>

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, белый

Автоматически созданное описаниеИсходные данные:

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, линия

Автоматически созданное описаниеРезультат:

**Выводы:**

Разобрали работу симплекс-метода, на практике применили его для исходной задачи, предварительно приведя ее к канонической форме. Также разобрали случаи, когда задача может иметь как бесконечное количество решений, так и не иметь решений: мы выражаем старые базисные переменные из каждого уравнения системы ограничений через остальные переменные и смотрим, в каком уравнении возрастание новой базисной переменной быстрее всего даст 0. Попадание в такую ситуацию означает, что мы «наткнулись» на новую вершину. Именно поэтому нулевые и отрицательные элементы не рассматриваются, т. к. получение такого результата означает, что выбор такой новой базисной переменной будет уводить нас из области, вне которой решений не существует; при выборе ведущей строки (исключаемой переменной) результат почленного деления вектора правых частей на ведущий столбец содержит только нулевые и отрицательные значения. Фактически, это значит, что какой бы рост мы ни задавали новой базисной переменной, мы никогда не найдем новую вершину. А значит, наша функция не ограничена на множестве допустимых решений.